Parcial Algebra II
18/05/2013

Tema 2

1. Sea $T \in L(P_2, R^3)$ $[T]_{BC} = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & k+2 & -1 \end{pmatrix}$ con $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de R^3 y $B = 1, 1+t, 1+t^2$ base de P_2 ¿Es posible hallar $k \in R$ de modo que existan $p, q \in P_2$ tales que $p \neq q$ y $T(p) = T(q) = (0 \ -1 \ -1)^t$?

2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (con demostración o contra-ejemplo respectivamente):
   (a) Sean V y W $R-$espacios vectoriales, $T_1 : V \to W$ y $T_2 : V \to W$ transformaciones lineales. Si $Nu(T_1) = Nu(T_2)$ e $Im(T_1) = Im(T_2) \Rightarrow T_1 = T_2$
   (b) Si $A = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ y $B = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ son dos conjuntos incluidos en un espacio vectorial $V \Rightarrow gen(A \cap B) = gen(A) \cap gen(B)$

3. Sea $B = \{v_1, v_2\}$ base de un espacio vectorial real V con producto interno $(.,.)$. Sean $(2v_1, v_2) = 6$, $||v_2||^2 = ||v_1||^2 = 4$ y $S = gen\{v_1 + v_2\}$
   (a) Calcular la distancia de $w = 5v_1 - 5_v2$ al subepacio S
   (b) Calcular la matriz de producto interno en base $B^* = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$

4. Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A \in R^{4x2}$ una matriz de rango 1 tales que $Col(A) \subseteq Nul(B)$ y el vector $(0\ 0\ 1\ 0)^t$ pertenece al espacio nulo de A^t
   (a) Hallar la matriz de proyeccion al espacio columna de A
   (b) Sabiendo que $\frac{1}{3}col_1 B + \frac{4}{3}col_2 B = P_{Col(B)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ hallar todos los $\hat{x} \in R^4$ que minimizan
   $\left\| Bx - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \forall x \in R^4$

5. Sea $V = \{f : R \to R / f(x) = a\ g_1(x) + b\ g_2(x),\ a, b \in R\}$ donde $g_1(x) = e^x$ y $g_2(x) = xe^x$ con el producto interno: $(f, g) = \int_{-1}^{1} e^{-2x} f(x) g(x) dx$

   Sea $T \in L(V, R^{2x2})$ de modo tal que:
   $T(g_1 - g_2) = \begin{pmatrix} (g_1, g_2) & 2 \\ 0 & \frac{9}{2}|||g_2||^2 \end{pmatrix}$ y $T(g_1 + g_2) = \begin{pmatrix} 0 & -3|||g_1 + g_2|||^2 \\ (g_1, g_2) & -\frac{1}{2}|||g_1||^2 \end{pmatrix}$
   (a) Hallar el $Nu(T)$ y la $Im(T)$
   (b) Elegir una BOG B_1 de V y hallar $[T]_{B_1 B_2}$ siendo $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de R^{2x2}

Fuente: http://aleperno.com.ar libre distribución y reproducción. Cualquier error o consulta favor de comunicarla