27/2/13 Tema 2

1) a) Encontrar las soluciones acotadas de $t y'(t) - y(t) = (t-1)\, e^{t}$ en $(-\infty, 0)$

b) Sabiendo que $y_1(t) = \cos(t)\, e^{3t}$ ^ $y_2(t) = \cancel{\text{sen}}\, e^{3t}$ son soluciones de $y'' - ay + by = 0$, encontrar solución general de $y'' + ay' + by = e^{3t}$

2) a) Para cada par de números reales a, b hallar los autovalores y autovectores de $A = \begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix}$

b) Decidir si las dos siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (Justificar):

i) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene n autovalores reales distintos, es simétrica.

ii) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ antisimétrica, sus autovalores son imaginarios puros.

3) Sea Q la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2 = \frac{3}{2} x_1^2 + 3x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_2^2$ dar una idea gráfica de sus conjuntos de nivel (respecto de x_1, x_2) y estudiar sus extremos en la circunferencia $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 4\}$

4) Para cada número real $\mu \neq -1$ considere el sistema $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = \mu x_1(t) + \mu x_2(t) \end{cases}$

Determinar todos los valores de $\mu \neq -1$ para los cuales todas las soluciones

$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ del sistema verifiquen $\lim_{t \to \infty} \|x\| < +\infty$

es decir el límite debe existir y ser finito.

5) Dada la matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ y el vector $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dar una DVS no reducida de B y resolver $Bx = b$ por cuadrados mínimos. ¿Cuantas soluciones hay?

HOJA N°

FECHA

1) a) Planteo una solución general y_G como suma de sus soluciones homogéneas y una particular

$$y_G = y_h + y_p$$

Homogénea:

$$ty' - y = 0 \rightarrow y = ty' \rightarrow y_h = c_1 t$$

Particular: propongo $y_p = e^t(At - B)$ $\quad y_p' = e^t(At - B) + e^t(A)$

$$ty' - y = (t-1)e^t$$

$$t\, e^t(At - B + A) - e^t(At - B) = (t-1)\, e^t$$

$$e^t\left[At^2 + (A-B)t - At + B\right] = (t-1)e^t$$

$$e^t\left[At^2 - Bt + B\right] = e^t(t-1)$$

$$A = 0 \wedge B = -1$$

$$y_p = e^t$$

Entonces nos queda $\boxed{y = c_1 t + e^t}$

b) Al igual que el item anterior, tengo las soluciones del homogéneo, queda por hallar la particular.

Propongo $y_p = Ae^{3t}$ $\quad y_p' = 3Ae^{3t}$ $\quad y_p'' = 9Ae^{3t}$

$$9Ae^{3t} + a3Ae^{3t} + bAe^{3t} = e^{3t}$$

$$e^{3t}(9A + 3Aa + bA) = e^{3t}$$

$$9A + 3Aa + bA = 1$$

$$A(9 + 3a + b) = 1$$

$$A = \frac{1}{9+3a+b}$$

Solución general: $y = e^{3t}\left(\cos(t) + \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{9+3a+b}\right)$

NOTA

HOJA *

FECHA

2) a) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} b-\lambda & -a \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)^2 + a^2$

$(b-\lambda)^2 + a^2 = 0$

$(b-\lambda)^2 = -a^2$

$|b-\lambda| = \sqrt{-a^2} = ai \nearrow b-\lambda = ai \quad \vee \quad b-\lambda = -ai$

$\lambda_1 = b-ai \quad \vee \quad \lambda_2 = b+ai$

$\underline{\lambda = b-ai}$ $\begin{pmatrix} ai & -a \\ a & ai \end{pmatrix}$ $S = \text{gen}\{(1 \quad i)^t\}$

$\underline{\lambda = b+ai}$ $\begin{pmatrix} -ai & -a \\ a & -ai \end{pmatrix}$ $S = \text{gen}\{(i \quad 1)^t\}$

b) i) Falso, sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ posee $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$, autovalores reales distintos sin embargo la matriz no es simétrica

ii) [illegible]

ii) $(Ax, y) \overset{PIC}{=} (Ax)^H y = x^H A^H y \overset{A \text{ antisimétrica y real}}{=} x^H (-A) y = (x, -Ay) = -(x, Ay)$

Supongo x autovalor asociado a λ

$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x) = \lambda \|x\|^2$

$-(x, Ax) = -(x, \lambda x) = -\bar{\lambda} \|x\|^2$

Como $(Ax, x) = -(x, Ax)$ entonces $\lambda \|x\|^2 = -\bar{\lambda} \|x\|^2$

Como x es autovector, sé que es no nulo, quedando que $\lambda = 0 \vee \lambda = \alpha i$ $\alpha \in \mathbb{R}$

NOTA

3) $Q(x) = \frac{3}{2} x_1^2 + 3 x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_2^2$

Vemos que es un trinomio cuadrado

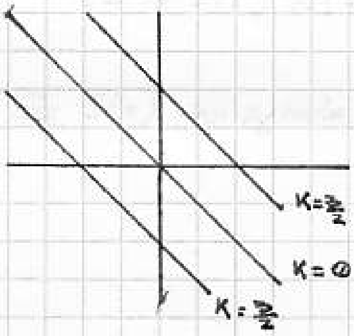
$$Q(x) = \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x_1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x_2 \right)^2 = \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, (x_1 + x_2) \right)^2 = \frac{3}{2} (x_1 + x_2)^2$$

$$Q(x) = \frac{3}{2} (x_1 + x_2)^2$$

$$C_k = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{3}{2} (x_1 + x_2)^2 = k \right\}$$

$$C_0 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{3}{2} (x_1 + x_2)^2 = 0 \right\} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 = -x_2 \right\}$$

$$C_{3/2} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{3}{2} (x_1 + x_2)^2 = \frac{3}{2} \right\} = \left\{ (x_1 x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 + x_2 = 1 \vee x_1 + x_2 = -1 \right\}$$



Son pares de rectas paralelas.

Ahora me pide hallar los extremos restringidos a $\|x\| = 4$

Si $\|x\| = 4$, $\|x\|^2 = 16$ $\quad \|x\|^2 = (x, x) \underset{p.i.}{=} x^t x$

Estando en $\mathbb{R}^2$, $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

Busco llevar la expresion a una forma $y_1^2 + y_2^2 = 1$.

$x_1^2 + x_2^2 = 16 \rightarrow \left(\frac{x_1}{4} \right)^2 + \left(\frac{x_1}{4} \right)^2 = 1 \qquad y_1 = \frac{x_1}{4} \quad y_2 = \frac{x_2}{4}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

Siendo entonces $x = Py$, $Q(x) = x^t A x = y^t P^t A P y$.

$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 24 & 24 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 48 \quad S_1 = \text{gen}\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \right\}$

$\lambda_2 = 0 \quad S_2 = \text{gen}\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \right\}$

Volviendo atrás con el cambio de variables.

$x_1 = P y_1$

$x_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

$x_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

Entonces el mínimo de $Q(x)$ sujeto a la restricción es 0 y se alcanza en $(-2\sqrt{2} \;\; 2\sqrt{2}) \wedge (2\sqrt{2} \;\; -2\sqrt{2})$

y el máximo es 48 y se alcanza en $(2\sqrt{2} \;\; 2\sqrt{2}) \wedge (-2\sqrt{2} \;\; -2\sqrt{2})$

NOTA

HOJA

FECHA

4) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1 + x_2 \\ x_2'(t) = \mu x_1 + \mu x_2 . \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \mu \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 1+\mu$

Como $\mu \neq -1$, $1+\mu \neq 0$ por lo que tengo dos autovalores distintos lo que hace a A diagonalizable.

$S_1 = \text{gen}\left\{ (1 \ -1)^t \right\}$ $S_2 = \text{gen}\left\{ (1 \ \mu)^t \right\}$

$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$ tal que $V^{-1} A V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+\mu \end{pmatrix}$

$x'(t) = A x(t) \iff x'(t) = V D V^{-1} x(t) \iff V^{-1} x(t) = D V^{-1} x(t) \iff$.

$y'(t) = D y(t)$ donde $y(t) = V^{-1} x(t)$

$\begin{cases} y_1'(t) = 0 \, y_1(t) \\ y_2'(t) = (1+\mu) \, y_2(t) \end{cases} \iff y(t) = \begin{cases} y_1 = a e^{0t} = a \\ y_2 = b e^{(1+\mu)t} \end{cases}$

Si $y(t) = V^{-1} x(t)$, $x(t) = V y(t)$.

$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b e^{(1+\mu)t} \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 = a + b e^{(1+\mu)t} \\ x_2 = -a + \mu b e^{(1+\mu)t} \end{cases}$

$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = \left(a + b e^{(1+\mu)t} \right)^2 + \left(-a \ b \mu e^{(1+\mu)t} \right)^2$

$\|x\|^2 = a^2 + 2ab e^{(1+\mu)t} + b^2 e^{2(1+\mu)t} + a^2 - 2ab\mu e^{(1+\mu)t} + b^2 \mu^2 e^{2(1+\mu)t}$

$\|x\|^2 = 2a^2 + e^{(1+\mu)t} \left(2ab - 2ab\mu \right) + e^{2(1+\mu)t} \left(b^2 + b^2 \mu^2 \right)$

Es evidente que si $\mu < -1$, $\|x\|^2$ converge a $2a^2$. con $x \to +\infty$.

NOTA

HOJA

FECHA

5) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B^t B = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 25 \quad S_1 = \text{gen}\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$\lambda_2 = 9 \quad S_2 = \text{gen}\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \;\; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 3\, u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \;\; -\frac{1}{\sqrt{2}} \;\; -\frac{4}{\sqrt{2}} \right)$$

$$u_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \;\; -\frac{\sqrt{2}}{6} \;\; -\frac{4\sqrt{2}}{6} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 5\, u_1 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \;\; \frac{5}{\sqrt{2}} \;\; 0 \right)$$

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; 0 \right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/6 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/6 \\ 0 & \frac{-4\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/6 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/6 \\ 0 & \frac{-4\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{DVS.}$$

Solución por cuadrados mínimos:

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17x_1 + 8x_2 \\ 8x_1 + 17x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_1 = \frac{2}{45} \quad x_2 = \frac{7}{45}$$

$$\hat{x} = \left(\frac{2}{45} \;\; \frac{7}{45} \right)^t.$$

NOTA