Probabilidad y Estadistica (61.09 - 81.04)

Parcial - Primer Cuatimestre 2014 - 24/5/14

1. Se arrojan seis dados equilibrados. Calcular la probabilidad de observar exactamente dos ases sabiendo que se observo exactamente un 3.

---

2. Un avion se mantendra volando mientras funcione alguno de sus dos motores. Cada motor funciona durante un tiempo alteatorio (medido en horas) T_i, $i = 1, 2$ y la densidad conjunta de T_1 y T_2 es de la forma:

$$f(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2}{432} \mathbf{1}\{3 < t_1 < 9; 3 < t_2, 3\}$$

Calcular la probabilidad de que el avion se mantenga volando durante mas de 3 horas despues de que dejo de funcionar alguno de sus motores.

---

3. Desde que se ingresa en la fila de un cajero automatico hasta que se extrae el dinero, transcurre un tiempo aleatorio X. El tiempo que se espera en la fila hasta llegar al cajero es una variable aleatoria Y. En minutos la densidad conjunta de X e Y es:

$$f(x, y) = 3e^{-3x} \mathbf{1}\{1 < y < 3x\}$$

Calcular la convarianza entre X e Y.

---

4. Estando maduras las brevas fuerzas patriotas arribaran a la Plaza de la Victoria organizadas en dos fracciones: los Chisperos conducidos por French y Beruti, y los Patricios dirigidos por Saavedra. Los Patricios arribaran de acuerdo con un proceso Poisson de intensidad 60 por hora y los Chisperos de acuerdo con un proceso Poisson de intensidad 100 por hora. Los dos procesos de Poisson son independientes.

Sabiendo que el 25 de Mayo entre las 12:00 y las 12:15 arribaron exactamente 20 Chisperos a la Plaza de la Victoria, calcular la probabilidad de que entre las 12:05 y las 12:10 hayan arribado por lo menos 2 integrantes de las fuerzas patriotas.

---

5. Para ganar el unicornio azul en un juego de tiro al blanco, Silvio debe acertar al blanco 12 veces. Los aciertos al blanco de los disparos efectuados son independientes y en cada disparo la probabilidad de acertar al blanco es de 0,25. Calcular aproximadamente al probabilidad de que Silvio necesite disparar mas de 40 veces para ganar el unicornio azul.

Respuestas

1. X_1 : Cantidad de Ases obtenidos en 6 tiros. $X_1 \sim \mathrm{Bi}(6, \frac{1}{6})$

   X_3 : Cantidad de Tres obtenidos en 6 tiros. $X_1 \sim \mathrm{Bi}(6, \frac{1}{6})$

   Hay dos formas de resolver esto:

   (a) $(X_1, X_3, X_{(1\cup 3)^c}) \sim \mathrm{Multinomial}(6, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6})$

   $P(X_1 = 2|X_3 = 1) = \dfrac{P(X_1 = 2, X_3 = 1)}{P(X_3 = 1)} = \dfrac{P(X_1 = 2, X_3 = 1, X_{(1\cup 3)^c} = 3)}{P(X_3 = 1)} =$
   $\dfrac{\frac{6!}{2!1!3!} * (\frac{1}{6})^2 * (\frac{1}{6})^1 * (\frac{4}{3})^3}{\frac{6!}{5!1!} * (\frac{1}{6})^1 * (\frac{5}{6})^5} =$

   $$= \frac{5!}{2!3!} * \left(\frac{1}{5}\right) * \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \binom{5}{2} * \left(\frac{1}{5}\right)^2 * \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

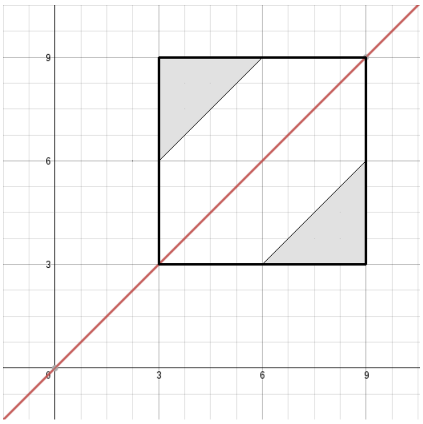
   (b) $X_1|X_3 = 1 \sim \mathrm{Bi}(5, \frac{1}{5}) \rightarrow P(X_1 = 2|x_3 = 1) = \binom{5}{2} * \left(\frac{1}{5}\right)^2 * \left(\frac{4}{5}\right)^3$

---

2. T_1 : Tiempo de funcionamiento del motor 1.

   T_2 : Tiempo de funcionamiento del motor 2.

   Vemos el siguiente grafico:



   El recuadro negro representa el dominio del problema y las areas grises, las areas donde se cumple lo pedido.

   $P() = 2 * \displaystyle\int_6^9 \int_3^{T_1-3} \frac{t_1 - t_2}{432} dt_2 dt_1 = \frac{1}{4}$

---

3. $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

   Modificando la densidad que nos dieron en principio:

$$f(x, y) = 3e^{-3x} 3x \frac{1}{3x} \mathbf{1}\{1 < y < 3x\}$$

De aca podemos distinguir que:
$3e^{-3x}3x$ tiene la forma de una Gamma de parametros $\alpha = 2$ y $\lambda = 3$.
$\frac{1}{3x}$ corresponde a $Y|X = x \sim \text{Unif}(0, 3x)$.
Funcion de regresion:

$$\varphi(x) = E\left[Y|X = x\right] = \frac{3x}{2} \to E[Y|X] = \frac{3X}{2}$$

Aca tambien hay dos posibles soluciones.

(a) Como $E[Y|X]$ es lineal, coincide con la recta de regresion.

$$y = \frac{3x}{2} \to \frac{Cov(X,Y)}{Var(x)} = \frac{3}{2} \tag{*}$$

$$Var(X) = \frac{2}{3^2} \tag{**}$$

Por (*) y (**) $\to Cov(X,Y) = \dfrac{3}{2} * \dfrac{2}{3^2} = \dfrac{1}{3}$

(b) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
$E[X] = \frac{2}{3}$
$E[Y] = E\left[E[Y|X]\right] = E\left[\dfrac{3}{2}X\right] = \dfrac{3}{2}E[X] = 1$
$E[XY] = E\Big[E[XY|X]\Big] = E\Big[X * E[Y|X]\Big] = E\left[X * \dfrac{3}{2}X\right] = E\left[\dfrac{3}{2}X^2\right] = \dfrac{3}{2}E\left[X^2\right] =$
$= \dfrac{3}{2}\left(Var(X) + E\left[X^2\right]\right) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{9} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{9}\right) = 1$
$\therefore Cov(X,Y) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

---

4. Muy largo, falta pasar a LaTeX.

---

5. X_{40} : Cantidad de aciertos en 40 disparos. $\sim Bi(\frac{1}{4}, 40)$
Me pide la probabilidad de necesitar mas de 40 disparos para ganar (se gana con 12 aciertos) $\to P(X_{40} < 12)$.
$X_{40} \sim \tilde{X} \sim N\left(\mu = 40\dfrac{1}{4}; \sigma = \sqrt{40\dfrac{1}{4}\dfrac{3}{4}}\right)$
$P(X_{40}, 12) = P(X_{40} \leq 11) = P(\tilde{X}_{40} \leq 11,5) = P(Z \leq \dfrac{11,5 - 10}{\sqrt{7,5}}) = P(Z \leq 0,55) =$ $*tabla*$