Probabilidad y Estadistica (61.09 - 81.04)

Parcial - Primer Cuatimestre 2014 - 3/7/14

1. Los siguientes datos son una muestra aleatoria de la duracion, en años, de cierto tipo de lamparas:

   1.20, 2.88, 1.61, 1.76, 0.30, 0.06, 0.27, 0.34, 0.82, 0.66, 0.16, 0.18, 0.60, 0.18, 0.28, 0.08

   Usando los intervalos con extremos 0, 0.29, 0.69, 1.39, 4, hallar y graficar la funcion histograma basda en la muestra y estimar la probabilidad de que una lampara del mismo tipo tenga una duracion superior a medio año.

---

2. Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

   $$f_{X,Y}(x,y) = (x+y)\mathbf{1}\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

   Calcular la esperanza de $Z = min(X,Y)$.

---

3. Una rata esta atrapada en un laberinto. Inicialmente elige al azar una de tres sendas. Cada vez que vuelve a su posicion inicial elige al azar entre las dos sendas que no eligio la vez anterior. Por la primera senda, retorna a la posicion inicial en 5 horas, por la segunda retorna a la posicion inicial en 3 horas, por la tercera sale del laberinto en 2 horas. Hallar la esperanza del tiempo que tardara en salir del laberinto.

---

4. A una direccion de correo electronico arriban mensajes que son spam y otros que no lo son. Los tiempos de arribo de los spam siguen un proceso Poisson de intensidad 3 por hora. Los tiempos de arribo de los que no son spam siguen un proceso Poisson de intensidad 4 por hora. Los dos procesos de Poisson son independientes. Sea T el tiempo de espera hasta que arriba el tercer spam despues de las 16:00, Calcular la esperanza de T sabiendo que entre las 16:00 y las 16:15 arribo exactamente un mensaje.

---

5. Se tienen dos monedas, una con probabilidad 0.5 de cara y la otra con probabilidad 0.7 de cara. En cada tirada se elige al azar una de las dos monedas. Calcular la probabilidad de obtener mas de 64 caras en 100 tiradas.

Respuestas

1. Primero planteo la funcion histograma

   $h(x) = \frac{\#\{0{,}16;0{,}18;0{,}18;0{,}06;0{,}28;0{,}08;0{,}27\}}{16*0{,}29}\mathbf{1}\{0 < x \leq 0{,}29\} + \frac{\#\{0{,}30;0{,}34;0{,}66;0{,}60\}}{16*0{,}40}\mathbf{1}\{0{,}29 < x \leq 0{,}69\} + \frac{\#\{1{,}20;0{,}82\}}{16*0{,}70}\mathbf{1}\{0{,}69 < x \leq 1{,}39\} + \frac{\#\{2{,}88;1{,}61;1{,}76\}}{16*2{,}61}\mathbf{1}\{1{,}39 < x \leq 4\}$

   $h(x) = \frac{7}{4{,}64}\mathbf{1}\{0 < x \leq 0{,}29\} + \frac{4}{6{,}4}\mathbf{1}\{0{,}29 < x \leq 0{,}69\} + \frac{2}{11{,}2}\mathbf{1}\{0{,}69 < x \leq 1{,}39\} + \frac{3}{41{,}76}\mathbf{1}\{1{,}39 < x \leq 4\}$

   $h(x) = 1{,}51\ \mathbf{1}\{0 < x \leq 0{,}29\} + 0{,}625\ \mathbf{1}\{0{,}29 < x \leq 0{,}69\} + 0{,}179\ \mathbf{1}\{0{,}69 < x \leq 1{,}39\} + 0{,}072\ \mathbf{1}\{1{,}39 < x \leq 4\}$

   X : Duracion de Lampara
   $P(x > 0{,}5) = 1 - P(x \leq 0{,}5)$
   $P(x \leq 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} h(x)\ dx = \int_0^{0{,}29} 1{,}51\ dx + \int_{0{,}29}^{0{,}5} 0{,}625\ dx$
   $P(x \leq 0{,}5) = 1{,}51 * 0{,}29 + 0{,}625 * (0{,}5 - 0{,}29)$

   $P(x \leq 0{,}5) = 0{,}5687 \rightarrow P(x > 0{,}5) = 0{,}4313$

---

2. $f_{XY}(x,y) = (x+y)\ \mathbf{1}\{0 < x < 1; 0 < y < 1\}$

   $Z = min(x,y) = \varphi(x,y)$

   $$\varphi(x,y) = \begin{cases} x & x < y \\ y & y \leq x \end{cases}$$

   $E[Z] = E[\varphi(x,y)] = \int\int \varphi(x,y) f_{XY}(x,y)\ dx\ dy$

   $E[Z] = \int\int_{x<y} x f_{xy}\ dxdy + \int\int_{y<x} y f_{xy}\ dxdy$

   Por simetria
   $E[Z] = 2 * \int\int_{x<y} x f_{xy}\ dxdy = 2 * \int_0^1 \int_0^y x * (x+y)\ dxdy$

   $E[Z] = 2 * \int_0^1 \int_0^y x^2 + yx\ dxdy = 2 * \int_0^1 [\frac{x^3}{3} + \frac{yx^2}{2}]_0^y\ dy$

   $E[Z] = 2 * \int_0^1 \frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{2}\ dy = 2 * \int_0^1 \frac{5y^3}{6}\ dy = \frac{5}{3}[\frac{y^4}{4}]_0^1 = \frac{5}{3} * \frac{1}{4} = 0{,}417$

---

3. Este en el parcial lo hice mal. Hay que dibujar la 'rama' de posibilidades y darse cuenta que las ramas del primer y segundo camino, son las mismas pero alternadas.

---

4. S: Llegada de Spam $\sim$ Poisson(3 x hora / 0.05 x min)

   $\bar{S}$: Llegada de No-Spam $\sim$ Poisson(4 x hora / 0.07 x min)

   Combinando ambas variables, $C = S + \bar{S}$

   C: Llegada de correo $\sim$ Poisson(7 x hora / 0.12 x min)

   T: Tiempo hasta el tercer spam despues de las 16:00 $\sim \gamma(k = 3, \lambda = 0{,}05)$

   $E[T] = E[T|1°\text{ mensaje sea spam}] * P(1°\text{ mensaje sea spam}) + E[T|1°\text{mensaje sea no spam}] * P(1°\text{ mensaje sea no spam})$

   Si el primer mensaje fue Spam, luego de los primeros 15 min debo esperar a la recepcion de otros dos mensajes de spam. Entonces debo hallar cuanto tiempo debo esperar para la recepcion de 2 mensajes de spam. Defino T_2: Tiempo de espera hasta 2 spam $\sim \gamma(k = 2, \lambda = 0{,}05)$.

   $E[T_2] = 2 * \frac{1}{0{,}05} = 40$ min.

   $E[T|1°\text{ mensaje sea spam}] = 15 + E[T_2] = 15 + 40 = 55$ min.

   Si el primer mensaje no fue spam, debere esperar 3 mensajes de spam luego de transcurridos dichos 15 min.

   $E[T|1°\text{ mensaje sea no spam}] = 15 + E[T] = 15 + 3 * \frac{1}{0{,}05} = 15 + 60 = 75$ min.

   Ahora calculo las probabilidades.

   $P(spam) = P\left(S(15) = 1 \wedge \bar{S}(15) = 0\right) = P\left(S(15) = 1\right) * P\left(\bar{S}(15) = 0\right)$

   $$P(spam) = \frac{e^{-0{,}75} * 0{,}75^1}{1!} * \frac{e^{-1{,}05} * 1{,}05^0}{0!} = \frac{e^{-1{,}8} * 0{,}75}{1!} = 0{,}1240$$

   $P(no - spam) = P\left(S(15) = 0 \wedge \bar{S}(15) = 2\right) = P\left(S(15) = 0\right) * P\left(\bar{S}(15) = 1\right)$

   $$P(no - spam) = \frac{e^{-0{,}75} * 0{,}75^0}{0!} * \frac{e^{-1{,}05} * 1{,}05^1}{1!} = 0{,}1736$$

   $0{,}1240 + 0{,}1736 = 0{,}2976$

   $$E[T] = 55 * \frac{0{,}1240}{0{,}2976} + 75 * \frac{0{,}1736}{0{,}2976} = 66{,}66 \rightarrow 67 \text{ min.}$$

---

5. M_1 : Moneda 1, $P(M_1 = cara) = 0{,}5$

   M_2 : Moneda 2, $P(M_2 = cara) = 0{,}7$

   M : Moneda que tiro.

   $P(M = cara) = P(\text{elijo } M_1 \wedge \text{ salga cara}) + P(\text{elijo } M_2 \wedge \text{ salga cara})$

   $P(M = cara) = P(\text{salga cara} \mid \text{elijo } M_1) * P(\text{elijo } M_1) + P(\text{salga cara} \mid \text{elijo } M_2) * P(\text{elijo } M_2)$

   $P(M = cara) = 0{,}5 * 0{,}5 + 0{,}7 * 0{,}5 = 0{,}6$

   X : Caras que salen en 100 tiros. $X \sim Bi(p = 0{,}6; n = 100)$

   Me pide $P(x > 64)$, siendo un numero muy alto uso aproximacion por normal.

$\hat{x} \sim N(\mu = 0{,}6 * 100; \sigma = \sqrt{0{,}6 * 100 * 0{,}4})$

$\hat{x} \sim N(\mu = 60; \sigma = 4{,}9)$

Defino $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$P(x > 64) = 1 - P(x \leq 64) \equiv 1 - P(z \leq 0{,}82) = 1 - 0{,}7939 = 0{,}2061$